УДК 519.688 + 004.021

К.А РУБЦОВ, С.А ЛАЗАРЕВ
K.A. RUBTSOV, S.A. LAZAREV

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТНОГО ГИПЕРКОРНЯ 4-ГО ПОРЯДКА
ABOUT THE IMPLEMENTATION OF ALGORITHMS FOR COMPUTING THE SQUARE HYPERROOT OF THE 4TH ORDER

В данной работе авторы рассматривают вопрос реализации алгоритмов решения уравнения x^x=a, которое соответствует нахождению квадратного гиперкорня 4-го порядка взаимосвязанного с W-функцией Ламберта широко применяемой для решения практических задач. Предлагается рассматривать как инвариант относительно иерархии операций понятий среднего арифметического и среднего геометрического для разработки новых алгоритмов нахождения квадратного гиперкорня 4-го порядка. Авторами разработаны новые алгоритмы нахождения квадратного гиперкорня 4-го порядка в области вещественных чисел и проведен анализ их эффективности.

Ключевые слова: tetration, тетрация, сверхстепень, сверхкорень, гиперкорень, гипероперации, среднее значение, функция Ламберта.

In this paper, the authors consider the issue of implementing algorithms for solving the equation x^x=a, which corresponds to finding a square hyperroot of the 4th order, interconnected with the Lambert W-function, which is widely used to solve practical problems. It is proposed to consider as an invariant with respect to the hierarchy of operations the concepts of arithmetic mean and geometric mean for the development of new algorithms for finding a square hyperroot of the 4th order. The authors have developed new algorithms for finding the 4th order square hyperroot in the domain of real numbers and analyzed their effectiveness.

Keywords: tetration, tetration, superpower, superroot, hyperroot, hyperoperations, average value, Lambert function.

Квадратный гиперкорень 4-го порядка (сверхкорень, суперкорень) является решением уравнения $x^x = a$, где a-число, а x-искомое значение. Он непосредственно связан с *W*-функцией Ламберта, изучавшейся еще в 1779 году Леонардом Эйлером. Функция не имела самостоятельного названия до 1980-х годов и впервые была введена в систему компьютерной алгебры Maple, где для нее использовалось имя LambertW. Имя Иоганна Генриха Ламберта было выбрано для названия функции, так как Эйлер ссылался в своей работе на труды Ламберта. Обозначение функции как «*W*» впервые было предложено в 1925 г. Pólya and Szegö. В настоящее время *W*-функцию Ламберта применяют в комбинаторике при подсчете числа деревьев, а также при решении некоторых трансцендентных алгебраических уравнений и уравнения как $x^x = a$ [1]. Также эта функция может использоваться в общей теории относительности и в квантовой механике (квантовой гравитации) в нижних измерениях [2] и для решения частной задачи внутренних энергий квантовой механики [3], [4], решении задач теплопроводности [5] и нахождения точных решений параболических уравнений [6]. Квадратный гиперкорень 4-го порядка, как и гипероперации 4-го и 0-го ранга могут использоваться в различных практических приложениях [7], [8], [9], [10]. Рассмотрим способы вычисления *W*-функции Ламберта.

Решение $x^x = a$ уравнения сводится к нахождению обратной гипероперации типа сверхкорня, то есть квадратного гиперкорня 4-го порядка. В системах компьютерной математики, например Wolfram Mathematica, имеется встроенная функция “ProductLog” вычисляющая *W*-функцию Ламберта, которая взаимосвязана с квадратным гиперкорнем 4-го порядка [7]:

$$x^x = a \Rightarrow x = \ln(a) / \text{ProducrtLog}(\ln(a)) = x = \ln(a) / W(\ln(a)), \quad (1)$$

где $\ln(a)$-натуральный логарифм.

W-функция Ламберта многозначная и не может быть выражена в терминах элементарных функций. Ее вычисляют путем разложения в ряд Тейлора, который сходится при $|x| < 1/e$, где e-основание натурального логарифма:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} \cdot x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \cdots . \quad (2)$$

Имеется расширение W-функция Ламберта и в область комплексных чисел. Из формулы (1) легко записать W-функций Ламберта через квадратный гиперкорень 4-го порядка:

$$x^x = a = e^b \Rightarrow x = b/W(b) \Rightarrow W(b) = b/x \Rightarrow b / \text{ssqrt}\left(e^b\right), \quad (3)$$

где “ssqrt”-квадратный гиперкорень 4-го порядка, то есть $(\text{ssqrt}(x))^{\text{ssqrt}(x)} = x$.

Формулу (3) запишем для $W(x)$:

$$W(x) = x / \text{ssqrt}\left(e^x\right) \quad (4)$$

Квадратный гиперкорень 4-го порядка может быть интерпретирован как расширение понятия среднего значения с применением гипероперации [7].

Среднее или медианное значение берет свое начало с учения древнегреческого математика Пифагора. В его учении медианное значение было средним числом в трехчленной последовательности чисел, которые находятся в равном отношении с соседними членами, что означает одинаковое расстояние. В дальнейшем понятие среднего значения было расширено до числовой характеристики множества чисел и функций заключенного между наименьшим и наибольшим их значениями. Общее описание средней величины дал в 1930 году А.Н. Колмогоров [11] для действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$:

$$M(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}\right), \quad (5)$$

где $\varphi(x)$–непрерывная строго монотонная функция, а $\varphi^{-1}(x)$–функция обратная $\varphi(x)$.

Формула (5) фактические описывает гомоморфизм среднего арифметического последовательности действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ с функцией отображения $\varphi(x)$.

Используя различные $\varphi(x)$ можно получить: $\varphi(x) = x$ – среднее арифметическое; $\varphi(x) = \log x$ – среднее геометрическое; $\varphi(x) = x^{-1}$ – среднее гармоническое; $\varphi(x) = x^2$ – среднее квадратическое и $\varphi(x) = x^a$, $a \neq 0$ – среднее степенное.

Среднее арифметическое можно использовать для вычисления квадратного корня $\sqrt{a}$ любого положительного числа a при заданном начальном приближении x_0 [12]:

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}. \quad (6)$$

Формула (6) может быть получена из среднего геометрического [12]: $\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}$, где в качестве приближенного значения для этого среднего геометрического взято среднее арифметическое чисел x_n и a/x_n:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}. \quad (7)$$

Если в формуле (7) произвести равнозначную замену операций на вышестоящего ранга, то есть сложение заменить на умножение, a/x_n на логарифм, а деление на 2 квадратным корнем [13], [14], то получим формулу для вычисления квадратного гиперкорня 4-го порядка [15]:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2} \quad \to \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot \log_{x_n} a}. \quad (8)$$

Степень x^x не зависит от последовательности вычисления (сверху вниз или снизу вверх), то имеет место «локальная» коммутативность степени. В связи с этим в формуле (8) можно логарифм заменить корнем и получить новую формулу для вычисления квадратного гиперкорня 4-го порядка:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot \sqrt[x_n]{a}}. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) используют среднее геометрическое. Обе формулы можно записать, используя среднее арифметическое и дополнительно получить новые формулы вычисления квадратного гиперкорня 4-го порядка:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \log_{x_n} a}{2}, \quad (10)$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \sqrt[x_n]{a}}{2}. \quad (11)$$

Квадратный гиперкорень 4-го порядка не может иметь аргумент меньше, чем $\sqrt[-e]{e} \approx 0{,}6922$. В области значений аргумента $\sqrt[-e]{e} < a < 1$ он имеет два вещественных значения. Для получения второго значения целесообразно использовать формулу при $x_0 = a/4$ [15]:

$$x_{n+1} = \frac{-\ln a}{\ln\left(1/x_n\right)}. \quad (12)$$

Например, для $a = 0{,}7$ формула (12) позволяет получить второе значение квадратного гиперкорня 4-го порядка с погрешностью $\left|x_{n+1} - x_n\right| \le 10^{-10}$ равное 0,2809012247 за $n = 80$ циклов.

Следует отметить, что для диапазона аргументов квадратного гиперкорня 4-го порядка $\sqrt[-e]{e} < a < e^e$ существует еще одна формула, основанная на бесконечной тетрации [15]:

$$x_{n+1} = \left(1/a\right)^{-1/x_n} = \sqrt[x_n]{a}. \quad (13)$$

Формула (13) является следствием взаимосвязи квадратного сверхкорня 4-го порядка с W-функцией Ламберта по формуле (1), для которой имеется тождество [16]:

$$z^{z^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = -\frac{W\left(-\ln z\right)}{\ln z}.$$

В таблице 1 приведены результаты количества циклов приближения для формул (8-11) и (13).

Таблица 1 – Количество циклов приближения n в зависимости от значения аргумента и используемого метода вычисления квадратного гиперкорня 4-го порядка, при $x_0 = \sqrt{a}$ и $|x_{n+1} - x_n| \le 10^{-10}$.

a	$x_{n+1} = \sqrt{x_n \log_{x_n} a}$	$x_{n+1} = \sqrt{x_n \sqrt[x_n]{a}}$	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + \log_{x_n} a}{2}$	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + \sqrt[x_n]{a}}{2}$	$x_{n+1} = \sqrt[x_n]{a}$
0,7	–	157	–	157	76
1,5	–	21	–	21	19
1,6	1872	20	1788	20	21
1,7	147	19	145	19	23
1,8	82	19	82	19	25
1,9	60	18	59	18	26
2	48	18	48	18	28
3	21	14	21	14	43
4	1	1	1	1	1
10	8	9	9	9	274
15	6	6	6	6	12048
1000	16	20	18	20	–
10^6	21	31	26	39	–
10^9	23	54	33	61	–

Как видно из таблицы 1 для больших чисел эффективен метод по формуле (8). Метод по формулам (9) и (11) имеют сходимость на всей области определения квадратного гиперкорня 4-го порядка $\left]\sqrt[-e]{e}\,;+\infty\right[$. Формула (10) имеет аналогичную с (8) сходимость, но уступает при вычислении больших чисел. Формулу (13) можно рекомендовать для вычислений при $\sqrt[-e]{e} < a < 4$, так как при $a \in \left]4\,;e^e\right[$ сходимость уменьшается.

На основании вышеизложенного можно рекомендовать следующий алгоритм вычисления квадратного гиперкорня 4-го порядка:

$$\operatorname{ssqrt}(a) = \begin{cases} x_{n+1} = \sqrt[x_n]{a},\ a < e\,; \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot \log_{x_n} a},\ a \ge e. \end{cases} \tag{14}$$

Учитывая два значения квадратного гиперкорня 4-го порядка для аргумента $\sqrt[-e]{e} < a < 1$ дополним формулу (14) формулой (12) и запишем заключительный результат:

$$\operatorname{ssqrt}(a) = \begin{cases} \left\{ y_{n+1} = (-\ln a)/\ln(1/y_n),\ x_{n+1} = \sqrt[x_n]{a} \right\},\ \sqrt[-e]{e} < a < 1; \\ x_{n+1} = \sqrt[x_n]{a},\ 1 \le a < e\,; \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot \log_{x_n} a},\ a \ge e. \end{cases} \tag{15}$$

В формуле (15) принимаем начальные приближения $x_0 = \sqrt{a}$, $y_0 = a/4$.

Таким образом, с помощью формул (15) и (4) можно вычислить *W*-функцию Ламберта при решении практических задач.

В заключение следует отметить, что в последние годы область применения *W*-функции Ламберта постоянно расширяется [16]. Например, Banwell и Jayakumar в 2000 г. показали, что *W*-функция Ламберта описывает соотношение между напряжением, током и сопротивлением в полупроводниковом диоде, а Packel и Yuen в 2004 г. применили ее к математическому описанию баллистического снаряда при наличии сопротивления воздуха. Также были обнаружены приложения *W*-функция Ламберта в статистической механике, квантовой химии, комбинаторике, кинетике ферментов, физиологии зрения, разработке тонких пленок, гидрологии и анализе алгоритмов [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Corless et al. On the Lambert W function // Adv. Computational Maths, vol. 5, 1996, pp. 329-359.
2. Farrugia P.S., Mann R.B., Scott T.C. N-body Gravity and the Schrödinger Equation // Classical and Quantum Gravity journal, vol. 24, no. 18, 2007, pp. 4647-4659. DOI:10.1088/0264-9381/24/18/006
3. Scott T.C., Aubert-Frécon M., Grotendorst J. New Approach for the Electronic Energies of the Hydrogen Molecular Ion // Chem. Phys. Journal, vol. 324, 2006, pp. 323-338. DOI:10.1016/j.chemphys.2005.10.031
4. Maignan A.; Scott T.C. Fleshing out the Generalized Lambert W Function // SIGSAM, vol. 50, no. 2, 2016, pp. 45-60. DOI:10.1145/2992274.2992275
5. Сергеев С.А., Спиридонов Ф.Ф. Применение функции Ламберта W в решении задачи теплопроводности // Архив научно-образовательного журнала АлтГТУ "Горизонты образования", выпуск 4, 2002. URL: http://edu.secna.ru/media/f/LambertW.pdf (дата обращения: 03.05.2023).
6. Косов А.А., Семенов Э.И. Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений // Известия вузов. Математика. №8, 2019, с. 13-20. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F1959194461/02.pdf (дата обращения: 03.05.2023).
7. Rubtsov K.A., Romerio G.F. Hyperoperations, for science and technology. New algorithmic tools for computer science // Lambert Academic Publishing, 2011, 185 p. (ISBN: 978-3-8443-1516-5)
8. Rubtsov K.A., Konstantinov I.S., Lazarev S.A., Polshchykov K.A., Kiselev V.E. Application of hyperoperations for engineering practice // International Conference on Recent Developments in Robotics, Embedded and Internet of Things (ICRDREIOT2020) 16-17 October 2020, Tamil Nadu, India, IOP Publishing IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 994, 2020, 012040, DOI:10.1088/1757-899X/994/1/012040
9. Рубцов К.А., Romerio G.F. Гипероперации в математическом моделировании и научных исследованиях // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: Т. 1. Секция 1,2 – Волгоград : Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012; Харьков : Национ. техн. ун-т «ХПИ», 2012, с. 67-70.
10. Rubtsov K., Romerio G.F. Homomorphism, Isomorphism, Tetration and Zeration applications in Numerical Methods // 17 Mathematics in Science and Technology. International Congress of Mathematicians: Abstracts, Short Communications, Posters. ICM-2014, Seoul, 2014, pp. 703-704.
11. Колмогоров А. Н. Математика и механика // Избранные труды, М.: Наука, 1985, Т. 1., с. 136-138.
12. Виленкин Н.Я. Метод последовательных приближений // М: Наука, 1968, 108 с.

13. Рубцов К.А. Алгоритмизация ингредиентов во множестве алгебраических операций // Кибернетика, № 3, 1989,.с. 111-112.
14. Рубцов, К.А. Новые математические объекты // Белгород: БелГТАСМ Киев: НПП ИНФОРМАВТОСИМ, 1996, 251 с.
15. Рубцов К.А., Romerio G.F. Алгоритмизация гипероператоров 4-го ранга и их приложения // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ-26: сб. трудов XXVI Междунар. науч. конф.: в 2 ч. Ч. 2. – Ангарск : Ангарск. гос. технол. акад.; Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 2013, с. 170.
16. Lambert W-Function // Wolfram MathWorld.
URL: https://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html (дата обращения: 04.05.2023).

Рубцов Константин Анатольевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.т.н., заведующий учебно-научной лаборатории информационно-измерительных и управляющих комплексов и систем
Тел.: +7-904-088-08-48
E-mail: rubtsov@bsu.edu.ru

Лазарев Сергей Александрович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
К.э.н., заведующий лабораторией прикладного системного анализа и информационных технологий
Тел.: +7-915-527-36-65
E-mail: lazarev_s@bsu.edu.ru